Ecuaciones de primer grado

Temas

- Elementos de una ecuación
- Ecuaciones equivalentes
- Pasos para resolver ecuaciones de primer grado
- Aplicaciones de ecuaciones de primer grado

Una ecuacio de primer grado, es aquella que, tras simplificación, contiene incógnitas elevadas a la primera poder solamente.

¿Porque hablamos de simplificación?

Si miramos la siguientes ecuación, como tenemos x^2, podemos pensar que se trata de una ecuación de segundo grado.

$$x^2 + 25x + 23 - x^2 - 2^2$$

Pero, simplificando, notamos que:

$$x^2 + 25x + 23 - x^2 - 2^2 = 25x + 23 - 4 = 25x + 19 =$$

Se trata entonces de una ecuación de primer grado.

Para mejor entender el concepto de ecuación, es importante entender el significado de los siguientes términos:

Una igualdad es una expresión formada por dos miembros entre cuales tenemos el signo igual.Tomando el ejemplo de arriba, $25x = -19$es una igualdad**Una identidad** es una igualdad que es cierta para cualquier valor de las letras.Por ejemplo,

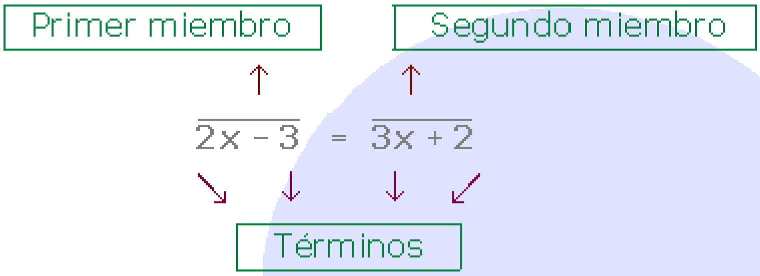
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Una ecuación es una igualdad que se cumple para algunos valores de las letras.

Elementos de una ecuación

Los miembros de una ecuación son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual.

Los términos son los sumandos que forman los miembros.



Las incógnitas son las letras que aparecen en la ecuación.

Las soluciones son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

El grado de una ecuación es el mayor de los grados de los monomios que forman sus miembros.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o se les resta una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada.

Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o se les divide una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada.

Pasos para resolver ecuaciones de primer grado

En general para resolver una ecuación debemos seguir los siguientes pasos:

1 Quitar paréntesis.

2 Quitar denominadores.

3 Agrupar los términos en *x* en un miembro y los términos independientes en el otro.

4 Reducir los términos semejantes.

5Despejar la incógnita.

Aplicaciones de ecuaciones de primer grado

-
    - Problemas sobre mezclas
    - Problemas sobre relojes. Recordad que el ángulo o arco descrito que recorre el minutero es siempre 12 veces mayor que el arco que describe la aguja horaria.
    - Problemas geométricos
    - Problemas sobre grifos

- Problemas sobre moviles

Una de las aplicaciones que encontramos muy a menudo, son problemas sobre móviles.

Resolviendo este tipo de problemas, habitualmente, tenemos que averiguar el espacio (o la distancia que recorre un cierto móvil), la velocidad, o bien el tiempo. La relación entre estos elementos es la siguiente:

espacio = velocidad · tiempo

$$e = v \cdot t$$

Los móviles van en sentido contrario

$$e_{AC} + e_{BC} = e_{AB}$$

Los móviles van en el mismo sentido

$$e_{AC} - e_{BC} = e_{AB}$$

Los móviles parten del mismo punto y con el mismo sentido

$$e_1 = e_2$$

Ecuaciones de segundo grado

Temas

Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es toda expresión de la forma:

$\mathrm{ax}^2 + bx + c = 0$ con $\mathrm{a} \neq 0$

Se resuelve mediante la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En el caso de que a¡0, multiplicamos los dos miembros por (-1)

Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas

Primer tipo de ecuación de segundo grado incompleta

$\mathrm{ax}^2 = 0$

La solución es $\mathrm{x}=0$

Segundo tipo de ecuación de segundo grado incompleta

$\mathrm{ax}^2 + bx = 0$

Extraemos factor común X.

Igualamos cada factor a 0y resolvemos las ecuaciones de primer grado.

$x=0$

$ax+b=0$

$x=-b\frac{}{a}$

Tercer tipo de ecuación de segundo grado incompleta

$ax^2 + c = 0$

Despejamos:

$ax^2 = -c$ $x^2 = \frac{-c}{a}$ $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ Las dos soluciones posibles, x_1, x_2se calculan así: $x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$x_1 = \sqrt{-\frac{-c}{a}}$

Estudio de las soluciones

Como lo sabemos ya, las ecuaciones de segundo grado son todas las ecuaciones de la forma

$ax^2 + bx + c = 0$con $a \neq 0$

y se resuelven así:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\boxed{b^2 - 4ac}}}{2a} \rightarrow \text{Discriminante}$$

$b^2 - 4ac$se llama el discriminante de la ecuación y permite averiguar en cada ecuación el número de soluciones.

Podemos distinguir tres casos:

El primer caso

$b^2 - 4ac > 0$

En esta situación, cuando el determinante es mayor que 0, la ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos.

El segundo caso

$$b^2 - 4ac = 0$$

En esta situación, cuando el determinante es igual a 0, la ecuación tiene una solución doble.

El tercer caso

$$b^2 - 4ac < 0$$

En esta situación, cuando el determinante es menos que 0, la ecuación no tiene soluciones reales.

Propiedades de las soluciones

La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

El producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$x_1 \cdot \ x_2 = \frac{c}{a}$$

La ecuación de segundo grado a partir de sus soluciones

Si conocemos las raíces de una ecuación, la podemos escribir de la siguiente manera:

$x^2 - Sx + P = 0$ Donde $S = x_1 + x_2$ y $P = x_1 \cdot x_2$

Factorización de un trinomio de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Ecuaciones racionales

La ecuaciones racionales son ecuaciones en las que aparecen fracciones polinómicas.

Para resolverlas se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Debemos comprobar las soluciones, para rechazar posibles soluciones extrañas provenientes de la ecuación transformada (la resultante de multiplicar por el mínimo común múltiplo), pero que no lo son de la ecuación original.

Ecuaciones bicuadradas

Las ecuaciones bicuadradas **son ecuaciones de cuarto grado sin términos de grado impar**:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Para resolverlas, efectuamos el cambio siguiente:

$$x^2 = t, x^4 = t^2$$

para poder generar una ecuación de segundo grado con la incógnita t:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Por cada valor positivo de t habrá dos valores de t:

$$x = \pm\sqrt{t}$$

Ecuaciones irracionales

Las ecuaciones irracionales son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo radical.

Pasos de resolución para ecuaciones irracionales

1 Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales.

2 Se elevan al cuadrado los dos miembros.

3 Se resuelve la ecuación obtenida.

4 **Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial**. Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado una ecuación se obtiene otra que tiene las mismas soluciones que la dada y, además las de la ecuación que se obtiene cambiando el signo de uno de los miembros de la ecuación.

5 Si la ecuación tiene varios radicales, se repiten las dos primeras fases del proceso hasta eliminarlos todos.

Ecuaciones de grado superior a dos

Es una ecuación de cualquier grado escrita de la forma:

$$P(x)=0$$

El polinomio $\mathrm{P(x)}$ se puede descomponer en factores de primer y segundo grado, entonces basta igualar a cero cada uno de los factores y resolver las ecuaciones de primer grado y de segundo grado resultantes.

Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini.

Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

Método de Gauss

Este método consiste en utilizar el método de reducción de manera que en cada ecuación tengamos una incógnita menos que en la ecuación precedente.

1 Ponemos como primera ecuación la que tenga el coeficiente en x más bajo.

2 Hacemos reducción con la primera y con la segunda ecuación, para eliminar el término en x de la segunda ecuación. Después ponemos como segunda ecuación el resultado de la operación:

$$\mathrm{E'}_2 = E_2 - 3E_1$$

3 Hacemos lo mismo con la primera y la tercera ecuación , para eliminar el término en x.

$$\mathrm{E'}_3 = E_3 - 5E_1$$

4 Tomamos la segunda y la tercera ecuacion trasformadas, para hacer reducción y eliminar el término en y.

$$\mathrm{E''}_3 = E'_3 - 2E'_2$$

5 Obtenemos el sistema equivalente escalonado.

6 Encontramos las soluciones.

Sistemas de ecuaciones no lineales

Un sistema de ecuaciones es no lineal, cuando **al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado**.

La resolución de estos sistemas se suele hacer por el **método de sustitución**, para ello seguiremos los siguientes pasos:

1 Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, preferentemente en la de primer grado.

2 Se sustituye el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación.

3 Se resuelve la ecuación resultante.

4 Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.

Sistemas de ecuaciones

Temas

- Sistemas equivalentes
- Resolución de sistemas de ecuaciones
- Tipos de sistemas

Dos ecuaciones con dos incógnitas forman un sistema, cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

$$a_1x + b_1y = c_1 a_2x + b_2y \ = c_2$$

La solución de un sistema es un par de números x_1, y_1, tales que reemplazando x por x_1 e y por y_1, se satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución.

Criterios de equivalencia

1 Si a ambos miembros de una ecuación de un sistema se les **suma o se les resta** una misma expresión, el sistema resultante es equivalente.

2 Si **multiplicamos o dividimos** ambos miembros de las ecuaciones de un sistema por un número distinto de cero, el sistema resultante es equivalente.

3 Si **sumamos o restamos** a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema, el sistema resultante es equivalente al dado.

4 Sin en un sistema se **sustituye** una ecuación por otra que resulte de sumar las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos, resulta otro sistema equivalente al primero.

5 Si en un sistema **se cambia el orden** de las ecuaciones o el orden de las incógnitas, resulta otro sistema equivalente.

Resolución de sistemas de ecuaciones

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones, en este artículo mostraremos tres de los más utilizados.

Método de sustitución

1 Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

2 Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo un ecuación con una sola incógnita.

3 Se resuelve la ecuación.

4 El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Método de igualación

1 Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2 Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.

3 Se resuelve la ecuación.

4 El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.

5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Método de reducción

1 Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.

2 La restamos o sumamos de forma que desaparece una de las incógnitas.

3 Se resuelve la ecuación resultante.

4 El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Tipos de sistemas

Sistema compatible determinado

Tiene **una sola** solución.

Gráficamente la solución es el punto de corte de las dos rectas.

Ejemplo: Hallar las soluciones del sistema

$$3x + 5y = 1 \quad 2x - y = 5$$

Aplicamos el método de reducción, para lo cual multiplicamos por cinco ambos lados de la segunda ecuación y se obtiene el sistema equivalente

$3x + 5y = 1 \quad 10x - 5y = 25$

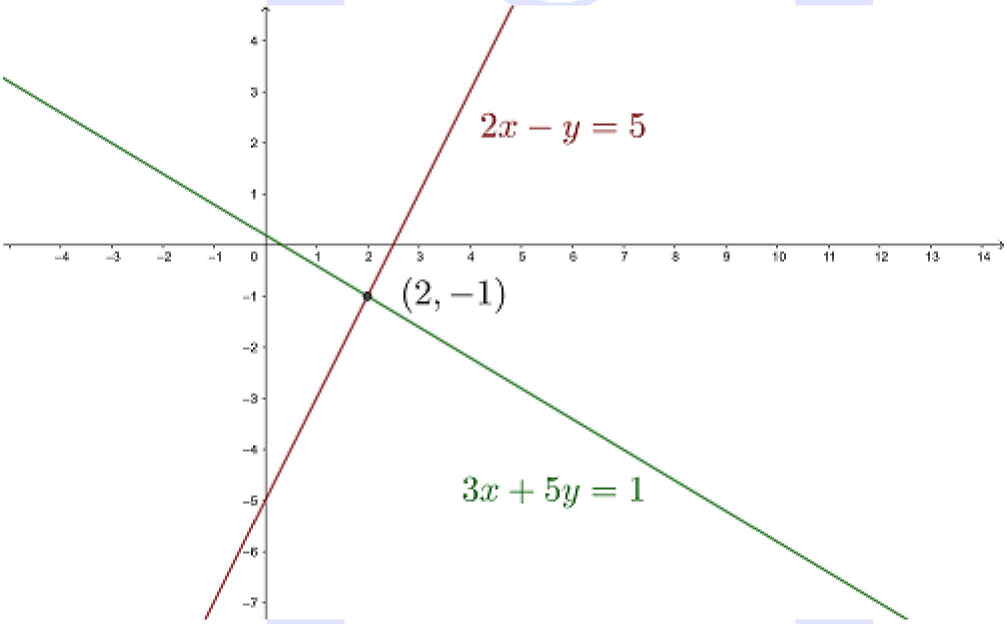
Sumamos ambas ecuaciones y resolvemos la ecuación resultante

$3x + 5y = 1 \quad 10x - 5y = 25 \quad 13x = 26 \quad x = 2$

Sustituimos el valor anterior en la segunda ecuación

$2x - y = 5 \quad 2(2) - y = 5 \quad y = -1$

La solución es $(2, -1)$ por lo que el sistema es compatible determinado



Sistema compatible indeterminado

El sistema tiene **infinitas** soluciones.

Gráficamente obtenemos dos rectas coincidentes. Cualquier punto de la recta es solución.

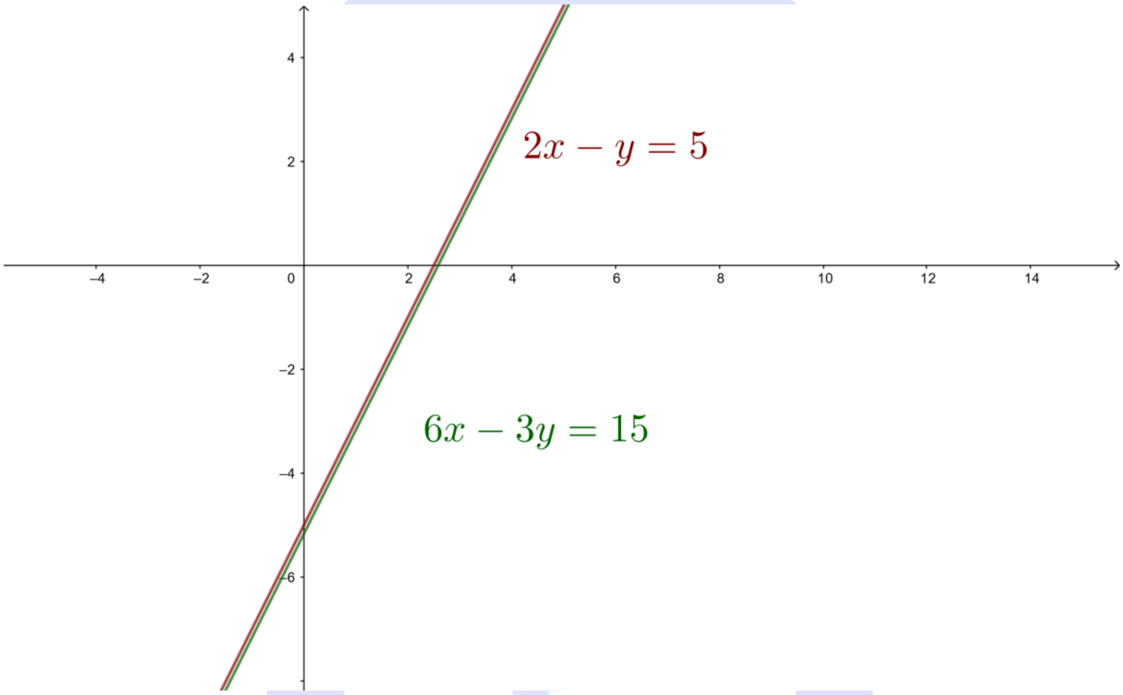
Ejemplo: Hallar las soluciones del sistema

$6x - 3y = 15 \quad 2x - y = 5$

Aplicamos el método de reducción, para lo cual multiplicamos por tres ambos lados de la segunda ecuación y se obtiene el sistema equivalente

$6x - 3y = 15 \quad 6x - 3y = 15$

Las rectas son iguales, por lo que se tienen infinitas soluciones. Así, se trata de un sistema compatible indeterminado



Sistema incompatible

No tiene solución

Gráficamente obtenemos dos rectas paralelas.

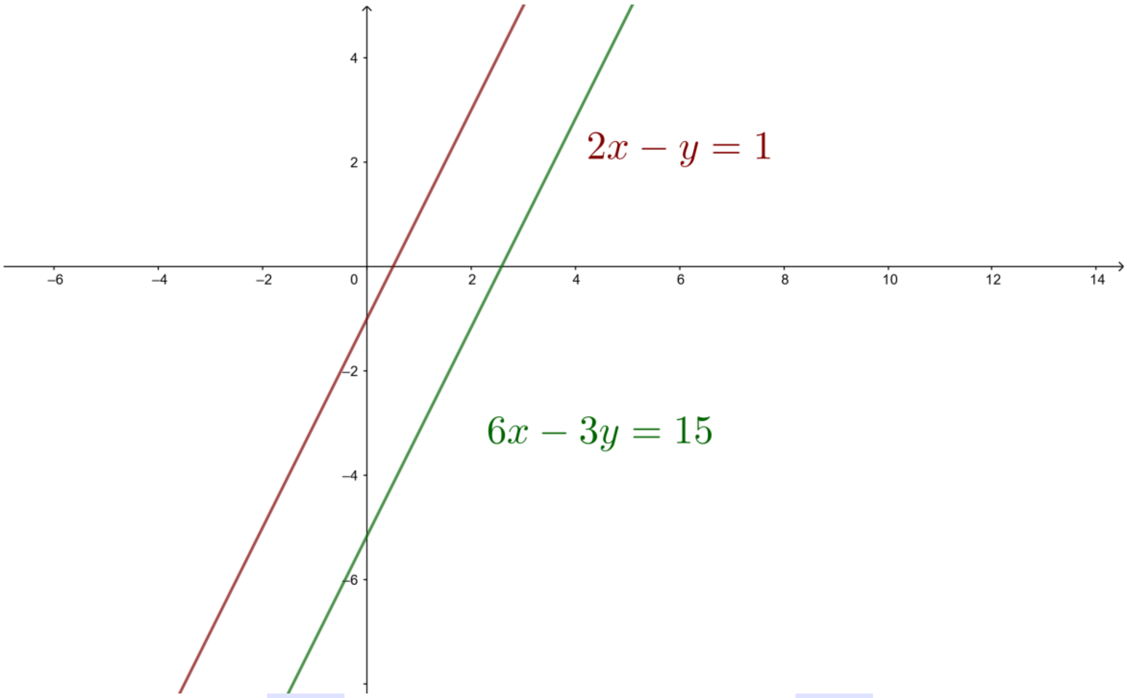
Ejemplo: Hallar las soluciones del sistema

$$6x - 3y = 15 \quad 2x - y = 1$$

Aplicamos el método de reducción, para lo cual multiplicamos por tres ambos lados de la segunda ecuación y se obtiene el sistema equivalente

$$6x - 3y = 15 \quad 6x - 3y = 3$$

Las rectas no son iguales, pero tienen la misma pendiente $m = 2$por lo que son paralelas y no existe solución. Así, se trata de un sistema incompatible


$2x - y = 1$
$6x - 3y = 15$